

УДК 517.925

В. В. АМЕЛЬКИН, М. Н. ВАСИЛЕВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ КОНЕЧНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И ЗАДАННОЙ ПРИВОДИМОЙ ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ*Белорусский государственный университет**(Поступила в редакцию 24.10.2014)*

Пусть $X = \mathbb{CP}^1$ – комплексная проективная прямая, $\alpha_j, j = \overline{1, n}$, – произвольные точки на прямой X , $\bar{M} = \bigcup_{j=1}^n \alpha_j$. На открытом множестве $M = X \setminus \bar{M}$ рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left(\sum_{j=1}^n \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \quad (1)$$

где Y – квадратная матрица порядка m ; U_j – $m \times m$ -матрицы-вычеты уравнения, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^n U_j = 0. \quad (2)$$

Согласно теореме о сумме вычетов, условие (2) означает, что точки $x = \infty$ нет среди особых точек матричного уравнения (1), чего всегда можно добиться конформным преобразованием \mathbb{CP}^1 .

Пусть x_0 – отмеченная точка открытого множества M . Обозначим через $\Phi_{x_0}(x)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (1), нормированную в точке x_0 , через $[\gamma_j]$ класс гомотопных замкнутых петель γ_j , выходящих из точки x_0 и охватывающих точку $\alpha_j, j = \overline{1, n}$. Классы гомотопных петель порождают фундаментальную группу $\pi_1(M, x_0)$ открытого множества (многообразия) M . Матрица $\Phi_{x_0}^j(x)$, полученная из матрицы $\Phi_{x_0}(x)$ аналитическим продолжением вдоль петли γ_j , представляется в виде $\Phi_{x_0}^j(x) = \Phi_{x_0}(x)V_j$, где V_j – квадратная постоянная матрица порядка m . Постоянные матрицы V_j , называемые матрицами монодромии, будем задавать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\prod_{j=1}^n V_j = E, \quad (3)$$

где E – единичная матрица.

При выполнении условия (3) невырожденные матрицы V_j порождают мультипликативную группу, которая является подгруппой общей линейной группы $GL(m; \mathbb{C})$ и называется группой монодромии [1].

С матрицами монодромии $V_j \in GL(m; \mathbb{C}), j = \overline{1, n}$, связаны посредством соотношений $V_j = e^{2\pi i W_j}$ квадратные матрицы W_j , которые называют показательными матрицами монодромии и которые играют определяющую роль в решаемой ниже задаче.

Пусть задан гомоморфизм

$$\chi: \pi_1(M, x_0) \rightarrow GL(m; \mathbb{C}) \quad (4)$$

фундаментальной группы многообразия M в мультипликативную группу $GL(m; \mathbb{C})$ невырожденных комплекснозначных матриц порядка m .

Гомоморфизм (4) называют монодромией или представлением монодромии уравнения (1).

В работе [1] доказано, что для любого набора точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ при $n > 3$ и любого $m \geq 3$ найдется такая монодромия (4), для которой не существует реализующего ее уравнения Фукса. Доказано также, что для любых трех точек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и любой монодромии (4) размерности $m = 3$ существует уравнение (1), (2), реализующее заданную монодрию.

Обратимся к случаю $n = 4, m = 2$, т. е. рассмотрим уравнение

$$dY = \left(\sum_{j=1}^4 \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \quad (5)$$

где Y – квадратная матрица порядка 2, U_j – постоянные (не зависящие от x) 2×2 -матрицы, удовлетворяющие условию (2) при $n = 4$.

В этом случае, как отмечалось в статье [2], из результатов работы [3] вытекает существование уравнения (5), (2) с заданными особыми точками $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, фундаментальная матрица решений которого реализует заданный гомоморфизм (4).

Обозначим

$$A = 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3), \quad B = \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2), \quad C = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1, \quad D = \alpha_3 - \alpha_2,$$

считая, что $A - \alpha_j C \neq 0, j = \overline{1, 4}$.

Т е о р е м а 1. Уравнение (5) с конечными особыми точками $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ приводится дробно-линейным преобразованием

$$x = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad AD - BC \neq 0, \quad (6)$$

к уравнению

$$dY = \left(\frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha} \right) Y dz \quad (7)$$

с особыми точками $\bar{\alpha}_1 = 0, \bar{\alpha}_2 = 1, \bar{\alpha}_3 = -1, \bar{\alpha}_4 = \alpha$, где

$$\alpha = \frac{\alpha_4 D - B}{A - \alpha_4 C}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в уравнении (5) сделать замену (6), то

$$dY = \left(\sum_{j=1}^4 \frac{U_j}{z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D} \right) \frac{AD - BC}{Cz + D} Y dz. \quad (8)$$

Замечая тогда, что

$$\frac{U_j(AD - BC)}{(z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D)(Cz + D)} = \frac{(A - \alpha_j C)U_j}{z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D} - \frac{CU_j}{Cz + D},$$

приходим к выводу, что поскольку должно выполняться равенство (2) ($n = 4$), то уравнение (8) принимает вид

$$dY = \left(\sum_{j=1}^4 \frac{U_j}{z - \frac{\alpha_j D - B}{A - \alpha_j C}} \right) Y dz. \quad (9)$$

Полагая в (9)

$$\bar{\alpha}_j = \frac{\alpha_j D - B}{A - \alpha_j C},$$

получаем $\bar{\alpha}_1 = 0, \bar{\alpha}_2 = 1, \bar{\alpha}_3 = -1, \bar{\alpha}_4 = \alpha$, что и требовалось доказать.

Напомним далее, что набор матриц $B_j, j = \overline{1, n}$, называется приводимым, если все эти матрицы могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду одним линейным невырожденным преобразованием.

Задача [4; 5, с. 59]. Заданы некоммутативные приводимые показательные матрицы монодромии второго порядка $W_j, j = \overline{1, 4}$, собственные значения которых всегда можно считать равными $\xi_j, 0$, такие, что $-1 < \xi_j < 0, j = \overline{1, 3}, \xi_4 = 1$. Требуется построить матричное дифференциальное уравнение (7), фундаментальная матрица решений которого в окрестности особых точек $\bar{\alpha}_j, j = \overline{1, 3}$, α имеет соответственно вид

$$\Phi^j(z) = \Phi_j^*(z)(z - \bar{\alpha}_j)^{W_j}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \Phi^4(z) = \Phi_4^*(z)(z - \alpha)^{\Lambda_0}(z - \alpha)^N,$$

где $\Phi_j^*(z), \Phi_4^*(z)$ – голоморфно обратимы в особых точках, Λ_0 – диагональная матрица, а N – нильпотентная матрица. Здесь матрицы U_j надо найти как функции $W_j, j = \overline{1, 4}$, и выявить природу этих функций.

З а м е ч а н и е 1. В сформулированной задаче точка нормирования фундаментальной матрицы решений – это $z_0 = \infty$.

Считая теперь, что матрицы $W_j, j = \overline{1, 3}$, уже приведены к верхнетреугольному виду, их можно для определенности рассматривать в виде

$$W_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \mu_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (10)$$

А тогда

$$V_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & v_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & v_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\lambda_j = e^{2\pi i \xi_j}, \quad v_j = \frac{\mu_j}{\xi_j}(\lambda_j - 1), \quad j = \overline{1, 3}, \quad v_4 = -\left(\frac{v_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \frac{v_2}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{v_3}{\lambda_3} \right).$$

Далее, поскольку собственные значения матриц W_j и матриц-вычетов уравнения (7) совпадают [6, с. 159], то матрицы $U_j, j = \overline{1, 3}$, в уравнении (7) представимы [4] в виде

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (12)$$

Что же касается матрицы U_4 , то ее всегда можно привести к виду

$$U_4 = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

что мы и будем считать выполненным.

А в таком случае из условия (2) при $n = 4$ следует, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 1 = 0, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0. \quad (14)$$

Теорема 2. Если в матрицах (12) соответственно $\theta_1 = 2c\alpha$, $\theta_2 = -c(\alpha - 1)$, $\theta_3 = -c(\alpha + 1)$, где c – произвольная вещественная или комплексная постоянная, то уравнение (7) вполне интегрируемо.

Доказательство. Уравнение (7) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда [7, с. 41] дифференциальная 1-форма

$$\omega = \left(\frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha} \right) dz$$

удовлетворяет условию

$$d\omega = \omega \wedge \omega, \quad (15)$$

где \wedge – оператор внешнего дифференцирования.

Из соотношения (15) для матриц-вычетов уравнения (7) получаем тогда равенства

$$\begin{aligned} dU_1 &= [U_2, U_1] d \ln(0-1) + [U_3, U_1] d \ln(0+1) + [U_4, U_1] d \ln(0-\alpha), \\ dU_2 &= [U_1, U_2] d \ln(1-0) + [U_3, U_2] d \ln(1+1) + [U_4, U_2] d \ln(1-\alpha), \\ dU_3 &= [U_1, U_3] d \ln(-1-0) + [U_2, U_3] d \ln(-1-1) + [U_4, U_3] d \ln(-1-\alpha), \\ dU_4 &= [U_1, U_4] d \ln(\alpha-0) + [U_2, U_4] d \ln(\alpha-1) + [U_3, U_4] d \ln(\alpha+1), \end{aligned}$$

где $[U_j, U_k]$ – матричный коммутатор, которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} dU_1 &= [U_4, U_1] \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad dU_2 = [U_4, U_2] \frac{d\alpha}{\alpha-1}, \quad dU_3 = [U_4, U_3] \frac{d\alpha}{\alpha+1}, \\ dU_4 &= [U_1, U_4] \frac{d\alpha}{\alpha} + [U_2, U_4] \frac{d\alpha}{\alpha-1} + [U_3, U_4] \frac{d\alpha}{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая представление матриц (12), (13), из матричных уравнений (16) получим скалярные уравнения

$$d\theta_1 = \theta_1 \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad d\theta_2 = \theta_2 \frac{d\alpha}{\alpha-1}, \quad d\theta_3 = \theta_3 \frac{d\alpha}{\alpha+1}, \quad \frac{\theta_1}{\alpha} + \frac{\theta_2}{\alpha-1} + \frac{\theta_3}{\alpha+1} = 0. \quad (17)$$

Последнее соотношение в (17) и второе равенство в (14) означают, что

$$\theta_2 = -\frac{\alpha-1}{2\alpha} \theta_1, \quad \theta_3 = -\frac{\alpha+1}{2\alpha} \theta_1, \quad (18)$$

а интегрирование первых трех уравнений в (17) приводит к равенствам

$$\theta_1 = c_1 \alpha, \quad \theta_2 = c_2 (\alpha-1), \quad \theta_3 = c_3 (\alpha+1), \quad (19)$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

Полагая $c_1 = 2c$, из (18) и (19) находим, что $c_2 = c_3 = -c$, а это и доказывает теорему 2.

Обозначим

$$U = \frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha},$$

где матрицы U_j , $j = \overline{1, 4}$, имеют соответственно вид (12), (13).

Очевидно, что матрицу U можно представить и так:

$$U = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$u_1(z) = \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z-1} + \frac{\xi_3}{z+1} + \frac{1}{z-\alpha}, \quad u_2(z) = \frac{\theta_1}{z} + \frac{\theta_2}{z-1} + \frac{\theta_3}{z+1}.$$

Пусть

$$h(z) = z^{\xi_1} (z-1)^{\xi_2} (z+1)^{\xi_3} (z-\alpha).$$

Рассмотрим матрицу

$$Y(z) = \begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$y_1(z) = h(z), \quad y_2(z) = h(z) \int \frac{u_2(z)}{h(z)} dz.$$

Л е м м а. Матрица (20) является фундаментальной матрицей уравнения (7).

Доказательство. С учетом обозначений

$$y_1'(z) = u_1(z)y_1(z), \quad y_2'(z) = u_1(z)y_2(z) + u_2(z).$$

А в таком случае

$$\begin{aligned} Y'(z) &= \begin{pmatrix} y_1'(z) & y_2'(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(z)y_1(z) & u_1(z)y_2(z) + u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = UY, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

Т е о р е м а 3. Если выполняется первое равенство в (14), то фундаментальная матрица (20) уравнения (7) имеет заданные матрицы монодромии в представлении (4) при $t = 2$.

Доказательство. Так как матрицы монодромии (11) задаются в виде $V_j = e^{2\pi i W_j}$, $j = \overline{1, 4}$, то при найденной фундаментальной матрице (20) уравнения (7), которая в нерезонансном случае представляется в окрестности особых точек $\bar{\alpha}_j$, $j = \overline{1, 3}$, в виде

$$\Phi^j(z) = \Phi_j^*(z)(z - \bar{\alpha}_j)^{W_j}, \quad j = \overline{1, 3},$$

где $\Phi_j^*(z)$ – голоморфная в окрестности особой точки $z = \bar{\alpha}_j$ матрица, матрицы W_j – это матрицы (10), а в резонансном случае – это матрица

$$\Phi^4(z) = \Phi_4^*(z)(z - \alpha)^{\Lambda_0} (z - \alpha)^N,$$

где $\Phi_4^*(z)$ – голоморфная в окрестности особой точки $z = \alpha$ матрица, матрицы Λ_0 и N имеют соответственно вид

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то в нерезонансном случае при обходе переменной z вокруг особых точек $\bar{\alpha}_k$, $k = \overline{1, 3}$, фундаментальная матрица умножается [4] справа на матрицу $V_k = e^{2\pi i W_k}$. В резонансном случае при обходе переменной z вокруг особой точки α получаем матрицу

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}^4(z) &= \Phi_4^*(z) \left(\rho e^{(i\varphi + 2\pi i)} \right)^{\Lambda_0} \left(\rho e^{(i\varphi + 2\pi i)} \right)^N = \Phi_4^*(z) \left(\rho e^{i\varphi} \right)^{\Lambda_0} e^{2\pi i \Lambda_0} \left(\rho e^{i\varphi} \right)^N e^{2\pi i N} = \\ &= \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} e^{2\pi i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} (z - \alpha)^N e^{2\pi i \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \\ &= \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} \begin{pmatrix} e^{2\pi i} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} (z - \alpha)^N \left(E + 2\pi i \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z - \alpha)^N \begin{pmatrix} 1 & v_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} (z - \alpha)^N V_4. \end{aligned}$$

Заканчивает доказательство теоремы 3 ссылка на то, что матрицу V_4 можно записать в виде

$$V_4 = e^{2\pi i W_4}, \text{ где } W_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е 2. Можно показать (на чем мы не будем останавливаться из-за ограниченного объема статьи), что голоморфные матрицы $\Phi_j^*(z)$ представимы в виде

$$\Phi_j^*(z) = \begin{pmatrix} y_{1j}(z) & y_{2j}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3},$$

где

$$\begin{aligned} y_{11}(z) &= \xi_1(z-1)^{\xi_2}(z+1)^{\xi_3}(z-\alpha), \quad y_{12}(z) = \xi_2 z^{\xi_1}(z+1)^{\xi_3}(z-\alpha), \quad y_{13}(z) = \xi_3 z^{\xi_1}(z-1)^{\xi_2}(z-\alpha); \\ y_{21}(z) &= \frac{1}{\xi_1}(\varphi_{21} + \mu_1 y_{11}), \quad y_{22}(z) = \frac{1}{\xi_2}(\varphi_{22} + \mu_2 y_{12}), \quad y_{23}(z) = \frac{1}{\xi_3}(\varphi_{23} + \mu_3 y_{13}), \end{aligned}$$

а

$$\varphi_{2j} = \xi_j h(z) \int \frac{u_2(z)}{h(z)} dz,$$

и, в соответствии с теоремой 2, $u_2 = \frac{2c(z-\alpha)}{z(z^2-1)}$.

Что же касается голоморфной матрицы $\Phi_4^*(z)$, то

$$\Phi_4^*(z) = \Phi^4(z) (z - \alpha)^{-N} (z - \alpha)^{-\Lambda_0},$$

где матрица $\Phi^4(z)$ – это матрица (20).

Литература

1. Болибрух А. А. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 2. С. 3–47.
2. Болибрух А. А. // Современные проблемы математики. 2003. № 1. С. 29–82.
3. Dekkers W. // Lecture Notes in Math. 1979. Vol. 712. P. 33–43.
4. Еругин Н. П. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 5. С. 779–799.
5. Итс А. Р., Капаев А. А., Новокишенов В. Ю., Фокас А. С. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск, 2005.
6. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1957.
7. Амелькин В. В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. М., 2010.

V. V. AMEL'KIN, M. N. VASILEVICH

CONSTRUCTION OF THE FUCHS EQUATION WITH FOUR FINITE CRITICAL POINTS AND A GIVEN REDUCIBLE GROUP OF MONODROMY

Summary

One inverse problem of the analytic theory of linear differential equations is considered. Namely, the Fuchs equation with four critical points and a given reducible monodromy group of dimensionality 2 is constructed.